Analyse semi-minimale des équations différentielles algébriques

Rémi Jaoui

University of Notre Dame

18 Mars 2021

Introduction

Les problèmes que je vais considérer ont deux origines différentes: la théorie géométrique de la stabilité (au sens de la théorie des modèles) et l'étude des propriétés de transcendance des équations différentielles algébriques à la manière de Painlevé.

- La théorie géométrique de la stabilité en théorie des modèles étudie les ensembles définissables dans diverses théories T du premier ordre, notamment

  la théorie $T = \mathbf{DCF}_0$ des corps différentiels universels de car. 0, la théorie $T = \mathbf{CCM}$ des variétés compactes complexes et les complétions de la théorie $T = \mathbf{ACFA}$ des corps aux différences universels.

- L'un des objectifs est d'étudier les dévissages (ou décompositions) d'un ensemble définissable donné en terme d'ensembles définissables "élémentaires". Ces procédés de décomposition sont regroupés sous le terme d'**analyse semi-minimale**.

Introduction

Les problèmes que je vais considérer ont deux origines différentes: la théorie géométrique de la stabilité (au sens de la théorie des modèles) et l'étude des propriétés de transcendance des équations différentielles algébriques à la manière de Painlevé.

- La théorie géométrique de la stabilité en théorie des modèles étudie les ensembles définissables dans diverses théories T du premier ordre, notamment

  la théorie $T = \mathbf{DCF}_0$ des corps différentiels universels de car. 0, la théorie $T = \mathbf{CCM}$ des variétés compactes complexes et les complétions de la théorie $T = \mathbf{ACFA}$ des corps aux différences universels.

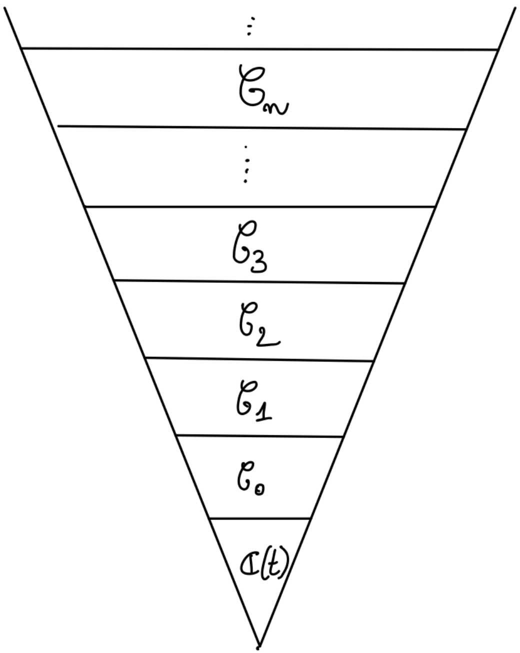
- L'un des objectifs est d'étudier les dévissages (ou décompositions) d'un ensemble définissable donné en terme d'ensembles définissables "élémentaires". Ces procédés de décomposition sont regroupés sous le terme d'**analyse semi-minimale**.

- Je vais présenter "le cas" des équations différentielles algébriques. Il correspond à la théorie $T = \mathbf{DCF}_0$ des corps différentiellement clos. au moyen du "foncteur"

$$\begin{array}{ccc} \text{“Équations différentielles algébriques”} & \rightarrow & \mathrm{Def}(\mathbf{DCF}_0) \\ (E) : F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 & \rightarrow & \mathcal{S}(E) = \left\{ \begin{array}{l} \text{solutions de } (E) \\ \text{dans un corps diff. universel} \end{array} \right. \end{array}$$

Quel type d'information contient l'analyse semi-minimale de $\mathcal{S}(E)$?

Pour une équation différentielle (E) d'ordre n, l'analyse semi-minimale décrit les différentes façons de décomposer les solutions de (E) en fonctions transcendantes à l'aide de **procédés d'intégration élémentaires** décrits par Painlevé, Nishioka, Umemura...



Corps différentiel $\mathcal{M}(U)$ des fonctions méromorphes sur un ouvert connexe $U \subset \mathbb{C}$

- à l'horizon, les fonctions méromorphes différentiellement transcendantes sur $\mathbb{C}(t)$.
- à nos pieds, $\mathcal{C}_0$ est une classe de fonctions méromorphes dites "classiques" qui contient
  - les fonctions rationnelles
  - la fonction exponentielle, les logarithmes, les fonctions elliptiques
  - toute fonction méromorphe que l'on peut atteindre à partir de ces fonctions en résolvant successivement des équations différentielles linéaires (d'ordre arbitraire).
- chaque classe $\mathcal{C}_k$ pour $k \geq 1$,
  - contient au moins les solutions d'équations diff. algébrique d'ordre k à paramètres dans $\mathcal{C}_{k-\mathbf{1}}$.
  - est close par les procédés d'intégration élémentaires.

Les classes $\mathcal{C}_k$ de fonctions méromorphes (Umemura)

Definition (Umemura)

On dit qu'un sous-corps différentiel $K \subset (\mathcal{M}(U), \frac{d}{dt})$ est un corps différentiel de fonctions méromorphes de la classe $\mathcal{C}_k$ s'il existe une tour de corps différentiels:

$$K_0 = \mathbb{C}(t) \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n = K$$

tel que chaque étage de la tour est obtenu à partir du précédent à l'aide d'une des opérations suivantes:

(A1) Résoudre une *équation algébrique*: $K_{i+\mathbf{1}} = K_i(\xi)$ est engendré par une solution ξ de:

$$\xi^r + b_{r-\mathbf{1}}\xi^{r-\mathbf{1}} + \ldots b_{\mathbf{1}}\xi + b_{\mathbf{0}} = 0 \text{ où } b_{\mathbf{0}}, \ldots b_{r-\mathbf{1}} \in K_i.$$

(C1) Résoudre une *équation différentielle linéaire* (d'ordre arbitraire): $K_{i+\mathbf{1}} = K_i\langle\xi\rangle$ est engendré par une solution ξ de:

$$y^{(r)} + b_{r-\mathbf{1}}y^{(r-\mathbf{1})} + \ldots + b_{\mathbf{1}}y = 0 \text{ où } b_{\mathbf{1}}, \ldots b_{r-\mathbf{1}} \in K_i.$$

(C2) *Composer* des fonctions méromorphes de K_i *avec une fonction abélienne* : pour un réseau Λ de $\mathbb{C}^r$ tel que $\mathbb{C}^r/\Lambda$ est une variété abélienne, $K_{i+\mathbf{1}} = K_i\langle\xi\rangle$ est le corps différentiel engendré par une fonction méromorphe ξ de la forme

$$\xi = \theta \circ \pi \circ (b_{\mathbf{1}}, \ldots, b_r) : U \to \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^r/\Lambda \to \mathbb{C}$$

où θ est une fonction mér. sur $\mathbb{C}^r/\Lambda$, $\pi : \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^r/\Lambda$ la projection canonique et $b_{\mathbf{1}}, \ldots, b_r \in K_i$.

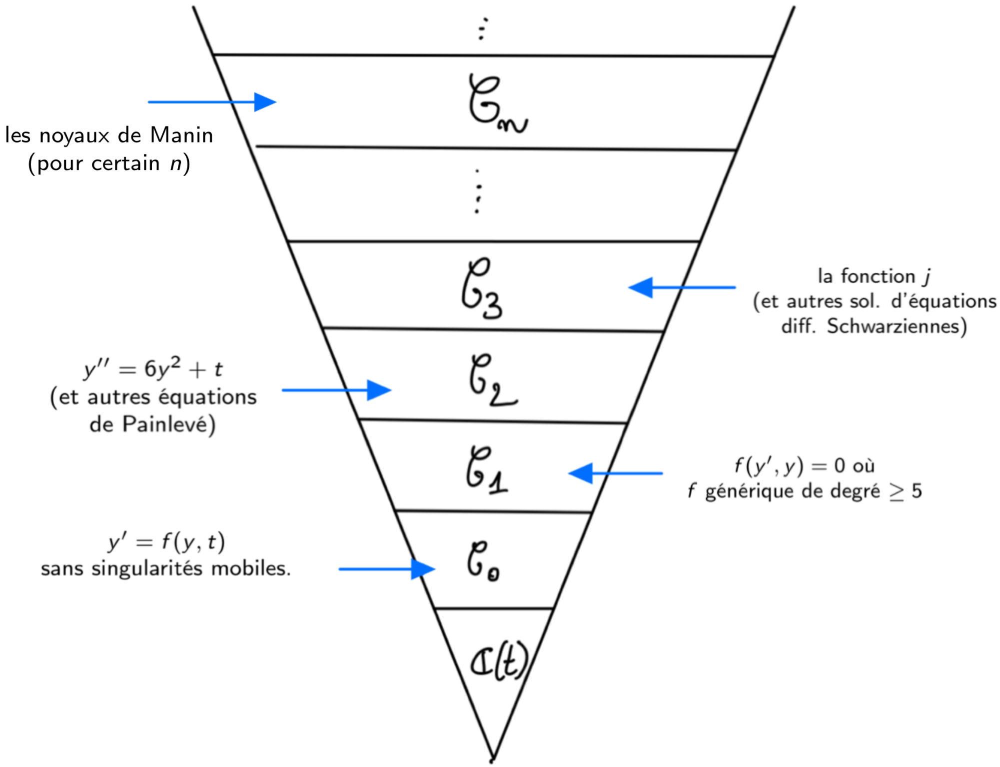
(P_k) Résoudre *une équation différentielle alg. d'ordre $\leq k$* : $K_{i+\mathbf{1}} = K_i\langle\xi\rangle$ est engendré par une solution ξ de:

$$G(y, y', \ldots, y^{(r)}) = 0 \text{ avec } r \leq k \text{ et } G \in K_i[X_{\mathbf{0}}, \ldots, X_r].$$

Quelques exemples d'équations minimales

Nous dirons qu'une équation différentielle d'ordre k est **minimale** (au sens de Shelah) ou que ses solutions génériques sont de nouvelles transcendantes (au sens de Painlevé) si ses solutions génériques vivent dans $\mathcal{C}_k \setminus \mathcal{C}_{k-1}$.

Exemples (Rosenlicht, Umemura-Nishioka, Hrushovski, Casale-Freitag-Nagloo)



Sommaire

Équations différentielles algébriques autonomes

Je vais considérer le cas d'équations différentielles algébriques autonomes

$$F(y^{(n)}, \dots, y'', y', y) = 0 \text{ où } F \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$$

et leurs solutions génériques.

- Elles seront présentées géométriquement (en oubliant le plongement dans un espace de jets) sous la forme:

  (X, v) où X est une variété algébrique complexe lisse munie d'un champ de vecteurs v.

  Pour obtenir des exemples intéressants, il faut travailler des variétés X qui ne sont pas projectives.
- On notera

  $$\phi : (X, v) \to (Y, w)$$

  pour exprimer que $\phi : X \to Y$ est un morphisme algébrique vérifiant $d\phi(v) = w$.

On obtient ainsi une catégorie appelés catégorie des D-**variétés complexes** par Buium et on utilisera:

- Cette catégorie admet des **produits** (fibrés): si (X, v) et (Y, w) sont deux objets,

  $$(X, v) \times (Y, w) := (X \times Y, v \times w)$$

- On dit qu'une sous-variété algébrique fermée Z de X est **invariante** par (X, v) si elle est tangente au champ de vecteurs v.

L'inégalité de modularité

Soient (X, v) et (Y, w) deux équations différentielles autonomes. **Une "famille invariante" de sous-variétés fermées** de (X, v) indexée par (Y, w) est une sous variété fermée

$$Z \subset X \times Y$$

invariante par le champ de vecteurs produit $v \times w$.

- On pense à (Y, w) comme à un "espace de paramètres".
  - Lorsque $w = 0$, on obtient ainsi une famille de sous-variétés fermées complexes

    $(*)$: $(Z_y, y \in Y(\mathbb{C}))$ toutes invariantes par le champ de vecteurs v.

  - Lorsque $w \neq 0$, on remplace $Y(\mathbb{C})$ par "l'ensemble des solutions de (Y, w)" pour conserver une famille de sous-variétés invariantes (mais elles ne sont plus définies sur $\mathbb{C}$).

L'inégalité de modularité

Soient (X, v) et (Y, w) deux équations différentielles autonomes. **Une "famille invariante" de sous-variétés fermées** de (X, v) indexée par (Y, w) est une sous variété fermée

$$Z \subset X \times Y$$

invariante par le champ de vecteurs produit $v \times w$.

- On pense à (Y, w) comme à un "espace de paramètres".
  - Lorsque $w = 0$, on obtient ainsi une famille de sous-variétés fermées complexes

    $$(*) : (Z_y, y \in Y(\mathbb{C})) \text{ toutes invariantes par le champ de vecteurs } v.$$

  - Lorsque $w \neq 0$, on remplace $Y(\mathbb{C})$ par "l'ensemble des solutions de (Y, w)" pour conserver une famille de sous-variétés invariantes (mais elles ne sont plus définies sur $\mathbb{C}$).
- Pour compter le nombre de paramètres dont dépend une telle famille, on suppose:
  - $dim(Z_y) \geq 0$ est indépendant de y (quitte à réduire Y).
  - Pour $y \neq y' \in Y(\mathbb{C})$, on a $Z_y \neq Z_{y'}$.

Si $q = dim(Y)$ et $p = dim(Z_y)$ on dira que Z est une "famille invariante" **dépendant de q paramètres** de sous-variétés invariantes de dimension p.

Definition

On dit que (X, v) de dimension n satisfait **l'inégalité de modularité** si toute "famille invariante" de sous-variétés fermées comme ci-dessus vérifie:

$$q \leq n - p.$$

Modularité

Definition

Nous dirons que (X, v) est modulaire si pour tout $k \geq 1$, $(X, v)^k$ satisfait les inégalités de modularité.

Exemples de "familles invariantes" de sous-variétés:

- Considérons le champ de vecteurs $v = \lambda x \frac{\partial}{\partial x} + \mu y \frac{\partial}{\partial y}$ (avec $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}$ par exemple). Alors

  $(\mathbb{A}^2, v) \times (\mathbb{A}^2, v)$ admet des familles de sous-variétés invariantes dépendent d'un nombre arbitraire de paramètres.

  obtenues à partir des deux intégrales premières rationnelles

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \mapsto (X = x_1/x_2, Y = y_1/y_2)$$

  en tirant en arrière (par exemple) les familles de polynômes homogènes $P_\alpha(X, Y)$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^n$.

Modularité

Definition

Nous dirons que (X, v) est modulaire si pour tout $k \geq 1$, $(X, v)^k$ satisfait les inégalités de modularité.

Exemples de "familles invariantes" de sous-variétés:

- Considérons le champ de vecteurs $v = \lambda x \frac{\partial}{\partial x} + \mu y \frac{\partial}{\partial y}$ (avec $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}$ par exemple). Alors

  $(\mathbb{A}^2, v) \times (\mathbb{A}^2, v)$ admet des familles de sous-variétés invariantes dépendent d'un nombre arbitraire de paramètres.

  obtenues à partir des deux intégrales premières rationnelles

  $$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \mapsto (X = x_1/x_2, Y = y_1/y_2)$$

  en tirant en arrière (par exemple) les familles de polynômes homogènes $P_\alpha(X, Y)$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^n$.
- Soit (X, v) une équation différentielle autonome et $\mathcal{F}$ un feuilletage de rang p sur X **algébriquement intégrable** admettant v comme symétrie infinitésimale (on dit aussi que $\mathcal{F}$ est invariant par v).

On peut associer au feuilletage $\mathcal{F}$ une "famille invariante" de sous-variétés de (X, v) correspondant à la famille des feuilles (algébriques) de $\mathcal{F}$. Cette famille vérifie le cas limite de l'inégalité de modularité:

$$q = n - p.$$

Modularité: exemples et contre exemples

Exemples:

(1) (Rosenlicht) L'équation différentielle

$$x' = x^2(x-1) \text{ est modulaire}$$

(2) Un produit de deux équations différentielles modulaires est modulaire. En particulier,

$$x' = x^2(x-1) \text{ et } y' = (y-2)^2(y-3) \text{ est modulaire.}$$

Elle admet deux feuilletages invariants dont les intégrales premières sont les projections sur x et y respectivement.

(3) Toute équation différentielle "dominée" par une équation différentielle modulaire est modulaire. En particulier, le produit symétrique

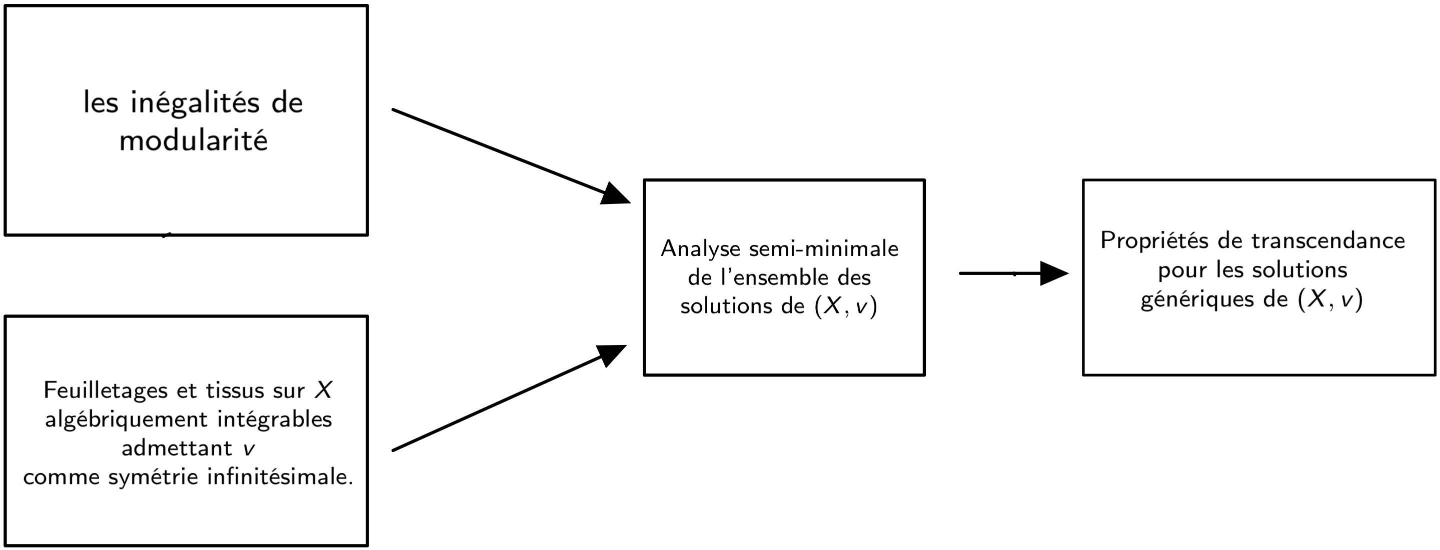
$$S^2(x' = x^2(x-1)) := (\mathbb{A}^2_{(x,y)}, x^2(x-1)\frac{\partial}{\partial x} + y^2(y-1)\frac{\partial}{\partial y})/\sim \text{ où } (x,y) \sim (y,x)$$

est modulaire. Elle n'admet aucun feuilletage invariant mais un 2-tissu invariant $\mathcal{W}$ qui correspond au produit des feuilletages verticaux et horizontaux.

Contre-exemple: Toute équation différentielle (autonome) dont les solutions génériques s'expriment à partir de fonctions méromorphes de la classe $\mathcal{C}_0$.

Comment utiliser la théorie géométrique de la stabilité?

Soit (X, v) une équation différentielle autonome. avec $dim(X) \geq 2$. Typiquement, les méthodes que j'ai développées ont la forme suivante:



Je vais me concentrer sur la description du "cas limite":

$(*)$: lorsque X n'admet aucun feuilletage ou tissu invariant algébriquement intégrable.

Je ne sais pas identifier de rôle précis pour les feuilletages (et tissus) non algébriquement intégrables (en présence des inégalités de modularité) dans l'analyse semi-minimale. Je reviendrai sur cette question lorsque je présenterai des exemples.

Le cas limite

Théorème (J.)

Soit (X, v) *une équation différentielle autonome et modulaire de dimension* n*. Supposons que:*

$(*)$: *il n'existe pas de feuilletage ni de tissu algébriquement intégrable sur* X *admettant* v *comme symétrie infinitésimale.*

Alors:

(A) *L'équation différentielle* (X, v) *est minimale: si* $t \mapsto \gamma(t)$ *est une solution analytique Zariski-dense dans* X *alors pour toute fonction* $f \in \mathbb{C}(X) \setminus \mathbb{C}$*, la fonction analytique*

$$t \mapsto f(\gamma(t)) \text{ est une fonctions méromorphe de } \mathcal{C}_n \setminus \mathcal{C}_{n-1}.$$

(B) *L'équation différentielle* (X, v) *est désintégrée : si* $h_i(t) = f_i(\gamma_i(t)) \in \mathcal{C}_n$ *sont des fonctions méromorphes construites comme (A) et s'il existe une relation algébrique non-triviale impliquant*

$$h_1(t), \dots, h_1^{(n-1)}(t), h_2(t), \dots h_2^{(n-1)}(t), \dots, h_r(t), \dots h_r^{(n-1)}(t)$$

alors il existe $i \neq j$ *et une relation algébrique non-triviale impliquant*

$$h_i(t), \dots, h_i^{(n-1)}(t), h_j(t), \dots, h_j^{(n-1)}(t).$$

Sommaire

Modularité et orthogonalité aux constantes

En pratique, il faut pouvoir construire des champs de vecteurs v sur des variétés algébriques X qui vérifient à la fois:

- il n'existe pas de feuilletages et de tissus algébriquement intégrables sur X admettant v comme symétrie infinitésimale.
- $(X, v)^n$ vérifie les inégalités de modularité.

Je vais présenter une façon indirecte d'obtenir les inégalités de modularité à partir d'**une version faible**: l'orthogonalité aux constantes.

Definition

Une équation différentielle autonome (X, v) est *orthogonale aux constantes* si les solutions génériques de (X, v) sont algébriquement indépendantes de toutes les fonctions méromorphes classiques (de la classe $\mathcal{C}_0$).

- Toute équation différentielle (X, v) modulaire est orthogonale aux constantes.

Question: Qu'en est-il de la réciproque?

Une réciproque partielle: la dichotomie de Zilber

Proposition (J.)

Soit (X, v) une équation différentielle autonome de dimension n. Supposons que:

$(*)$: *Il n'existe pas de feuilletages algébriquement intégrables sur X admettant v comme symétrie infinitésimale.*

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) *L'équation différentielle (X, v) est orthogonale aux constantes: les solutions génériques sont algébriquement indépendantes de toute la classe $\mathcal{C}_0$.*

(ii) *L'équation différentielle (X, v) est modulaire : pour tout $k \geq 1$, $(X, v)^k$ vérifie l'inégalité de modularité.*

- Dans le cas où (X, v) est une équation différentielle minimale, c'est un théorème de Hrushovski (la théorie $\mathbf{DCF_0}$ vérifie le principe de dichotomie de Zilber). Il est souvent formulé sous une forme négative:

  Si (X, v) est non (localement) modulaire alors l'ensemble des solutions de (X, v) "interprète" le corps des constantes.

- Il est crucial ici de travailler sous une hypothèse plus faible $(*)$ car l'on veut se servir de la modularité pour montrer de la minimalité. La même contrainte apparaît dans les travaux de Hrushovski et Chatzidakis pour les équations aux différences.

Linéarisation le long d'une sous-variété fermée invariante

Soit (X, v) une équation différentielle autonome de dimension n et Z une sous-variété fermée invariante de codimension r. En utilisant le champ de vecteurs v, on peut obtenir les structures suivantes:

- un champ de vecteur v_Z sur Z obtenu par restriction du champ de vecteurs v à Z.
- une connexion partielle notée ∇_v sur le fibré normal $N_{X/Z}$ le long de v: ∇_v peut être identifiée avec un champ de vecteurs ∇_v sur l'espace total $N_{X/Z}$ du fibré normal qui est "'linéaire" dans les fibres vérifiant

$$\pi : (N_{X/Z}, \nabla_v) \to (Z, v_Z) \text{ est un morphisme}$$

Linéarisation le long d'une sous-variété fermée invariante

Soit (X, v) une équation différentielle autonome de dimension n et Z une sous-variété fermée invariante de codimension r. En utilisant le champ de vecteurs v, on peut obtenir les structures suivantes:

- un champ de vecteur v_Z sur Z obtenu par restriction du champ de vecteurs v à Z.
- une connexion partielle notée ∇_v sur le fibré normal $N_{X/Z}$ le long de v: ∇_v peut être identifiée avec un champ de vecteurs ∇_v sur l'espace total $N_{X/Z}$ du fibré normal qui est "'linéaire" dans les fibres vérifiant

$$\pi : (N_{X/Z}, \nabla_v) \to (Z, v_Z) \text{ est un morphisme}$$

On distinguera:

(1) L'espace total $(N_{X/Z}, \nabla_v)$: on y pense comme à une équation différentielle autonome de dimension n. Elle admet un feuilletage algébriquement intégrable invariant dont une intégrale première est π.

(2) La (ou les) fibre générique de π: après avoir choisi des coordonnées convenables, on peut décrire comme une équation différentielle linéaire

$$Y' = AY \text{ où } A \in M_r(K) \text{ est une matrice à coefficients dans } K = (\mathbb{C}(Z), v_Z)$$

Le groupe $GL_m(K)$ agit par transformation de jauge sur les équations différentielles linéaires à paramètres dans K et on dénote par

$$[(N_{X/Z}, \nabla_v)]$$

la classe de cette équation différentielle linéaire modulo transformation de jauge. C'est un invariant plus fort que le son groupe de Galois.

Un théorème de linéarisation en dimension deux

Pour tout corps différentiel (K, δ), on peut identifier l'ensemble des équations différentielles linéaires **d'ordre un** modulo transformation de jauge comme le conoyau de

$$dlog : (K^*, \times) \to (K, +).$$

Théorème (avec L. Jimenez et A. Pillay)

Soit (X, v) une équation différentielle lisse d'ordre deux admettant une courbe invariante C. Supposons que:

(i) *L'équation différentielle (C, v_C) est orthogonale aux constantes.*

(ii) *Pour tout $n \geq 1$, $n.[(N_{X/Z}, \nabla_v)] \notin \mathbb{C} + dlog(\mathbb{C}(C)^*)$*

Alors l'équation différentielle (X, v) est orthogonale aux constantes.

(ii) exprime essentiellement que la fibre générique de $\pi : (N_{X/C}, \nabla_v) \to (C, v_C)$ ne descend pas aux constantes.

- **Cas linéaire:** Si $(X, v) = (N_{X/C}, \nabla_v)$ vérifiant (i) et (ii) alors

  (X, v) est orthogonale aux constantes mais toujours **non** modulaire.

- En revanche, une perturbation (X, v) de $(N_{X/C}, \nabla_v)$ qui préserve la courbe invariante et sa linéarisation et qui est sans feuilletage algébriquement intégrable invariant vérifie:

  (X, v) est modulaire.

Explications

- On utilise d'abord une réduction modèle-théorique en appliquant le principe de réflexivité de Shelah:

  (X, v) est orthogonale aux constantes si et seulement si pour $n \gg 0$, $(X, v)^n$ admet une intégrale première non constante.

- Fixons $n \geq 1$ et considérons

  $$C_n = C \times \ldots \times C \to X \times \ldots \times X.$$

  On considère la linéarisation du champ de vecteurs $v \times \ldots \times v$ le long de C_n, on obtient ainsi une équation différentielle linéaire

  $$(E_n) : Y' = A_n Y$$

  où A_n est une matrice de taille n à paramètres dans $\mathbb{C}(C_n)$. On dénote par G_n son groupe de Galois.

- Une obstruction à l'existence d'intégrales premières rationnelles sur $(X, v)^n$ est:

  G_n agit transitivement sur l'ensemble des solutions de (E_n) pour tout $n \geq 1$.

Conclusion: On veut donc non seulement assurer que $G_1 = \mathbb{G}_m$ mais aussi que tous les groupes de Galois

$$G_2, G_3, \ldots G_n, \ldots$$

sont suffisamment "gros".

Explication II

Pour tout $n \geq 1$, les projections $\pi_i : X^{n+1} \to X^n$ définissent des applications de "faces"

$$\pi_{i*} : G_{n+1} \to G_n \text{ pour } i = 1, \ldots, (n+1)$$

La propriété (i) assure que ces applications sont surjectives.

Lemme

Lorsque $G_1 = \mathbb{G}_m$ et la courbe (C, v_C) est orthogonale aux constantes, les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) *La suite $(G_n, n \in \mathbb{N})$ s'effondre: pour $n \gg 0$, les applications de faces*

$$\pi_{i*} : G_{n+1} \to G_n$$

sont virtuellement injectives.

(ii) $G_2 \neq \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$

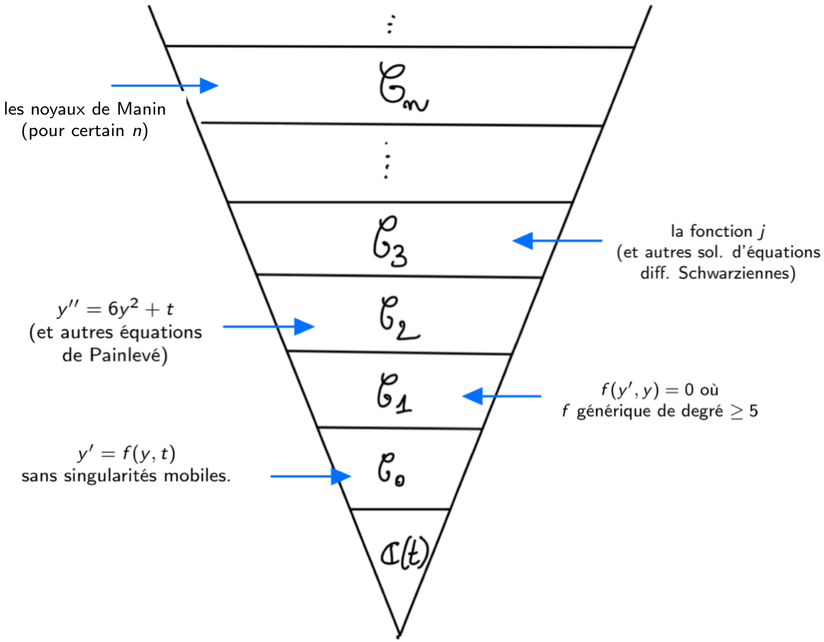
(iii) *Il existe $n \geq 0$ tel que $n.[(N_{X/Z}, \nabla_v)] \in \mathbb{C} + dlog(\mathbb{C}(C)^*)$*

En cours: généralisations en dimension supérieure.

Sommaire

Équations différentielles génériques

(Poizat 1980): à propos des corps différentiellement clos, on est souvent amené à faire des conjectures dont on est persuadé qu'elles ne peuvent être fausses que pour des équations très particulières et que pourtant on arrive à montrer que dans des cas encore plus particuliers.



- (Shelah 73') : Une équation différentielle "suffisamment générale" d'ordre n est minimale: ses solutions génériques vivent dans $\mathcal{C}_n \setminus \mathcal{C}_{n-1}$.
- Aujourd'hui, on ne sait toujours pas assurer

$$\mathcal{C}_{n-1} \subsetneq \mathcal{C}_n \text{ pour tout } n...$$

- Les exemples que je vais construire concernent $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

Champs de vecteurs planaires génériques

On considère des champs de vecteurs complexes sur le plan affine de la forme

$$v(x,y) = f(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \text{ où } f,g \in \mathbb{C}[x,y]$$

où $f(x,y), g(x,y)$ sont des polynômes de degré $\leq d$. Le degré d'un tel champ de vecteurs est le maximum du degré de f et du degré de g. On peut aussi utiliser le degré du feuilletage associé si l'on préfère.

Théorème (Landis-Petrovskii, 58')

Soit $d \geq 2$. Pour des choix génériques de $f(x,y), g(x,y)$ de degré $d \geq 2$, il n'existe pas de courbe complexe planaire C dans $\mathbb{C}^2$ invariante par le champ de vecteurs

$$v = f(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Si A est une variété abélienne simple (de dimension deux) et v un champ de vecteurs A-invariant alors (A,v) à la même propriété. Pourtant, les soutions de l'équation différentielle (A,v) s'expriment à l'aide de fonctions méromorphes de la classe $\mathcal{C}_0$...

Champs de vecteurs planaires génériques

Théorème (J.)

Soit $d \geq 3$ et soit $\mathcal{V}_d$ la famille des champs de vecteurs planaires complexes de degré $\leq d$.
Il existe une collection dénombrable $(F_i, i \in \mathbb{N})$ de fermés algébriques propres de $\mathcal{V}_d$ telle que pour tout champ de vecteurs $v \in \mathcal{V}_d \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$, l'équation différentielle associée

$$(E_v) : \begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

est:

(A) *fortement minimale : les coordonnées des solutions analytiques non stationnaires sont de nouvelles fonctions méromorphes de la classe $\mathcal{C}_2$.*

(B) *désintégrée : si $(x_1(t), y_1(t)), \ldots, (x_r(t), y_r(t))$ sont r solutions analytiques non stationnaires qui ne sont pas algébriquement indépendantes:*

$$t \mapsto (x_1(t), y_1(t), x_2(t), \ldots, x_r(t), y_r(t)) \text{ n'est pas Zariski-dense dans } \mathbb{C}^{2n}$$

alors il existe $i \neq j$ tel que:

$$t \mapsto (x_i(t), y_i(t), x_j(t), y_j(t)) \text{ n'est pas Zariski-dense dans } \mathbb{C}^4.$$

Question: Quelles sont les relations algébriques “spéciales” qui apparaissent dans (B)?

Remarques

- Dans ce cas générique, on utilise le théorème de Landis-Petrovskii pour montrer qu'il y a aussi peu de feuilletages et de tissus invariants que possible, c= 'est-à dire:

  Le seul tissu invariant réduit invariant par le champ de vecteurs v est le feuilletage $\mathcal{F}(v)$ tangent à v.

  Comme ce feuilletage n'est pas algébriquement intégrable, on n'obtient que (X, v) vérifie $(*)$.
- Pour démontrer les inégalités de modularité, il suffit donc d'établir la propriété d'orthogonalité aux constantes (dichotomie de Zilber)
- On procède en utilisant un théorème de spécialisation et la construction d'exemples explicites:

$$x' = x^2(x-1) \text{ et } y' = y^2(y-1) \text{ est modulaire.}$$

- Conclusion: modularité + $(*) \Rightarrow$ le théorème.

Remarques

- Dans ce cas générique, on utilise le théorème de Landis-Petrovskii pour montrer qu'il y a aussi peu de feuilletages et de tissus invariants que possible, c= 'est-à dire:

  Le seul tissu invariant réduit invariant par le champ de vecteurs v est le feuilletage $\mathcal{F}(v)$ tangent à v.

  Comme ce feuilletage n'est pas algébriquement intégrable, on n'obtient que (X, v) vérifie $(*)$.
- Pour démontrer les inégalités de modularité, il suffit donc d'établir la propriété d'orthogonalité aux constantes (dichotomie de Zilber)
- On procède en utilisant un théorème de spécialisation et la construction d'exemples explicites:

$$x' = x^2(x-1) \text{ et } y' = y^2(y-1) \text{ est modulaire.}$$

- Conclusion: modularité + $(*)$ $\Rightarrow$ le théorème.

Question

Existe t-il une équation différentielle autonome (X, v) d'ordre deux minimale (les solutions génériques sont dans $\mathcal{C}_2 \setminus \mathcal{C}_1$) telle qu'il existe un second feuilletage invariant $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}(v)$ (nécessairement non algébriquement intégrable) ?

Une observation: Feuilletages invariants en dimension 3

Pour les équations d'ordre 3, les travaux de Casale-Freitag-Nagloo produisent une classe naturelle d'équations différentielles minimales qui préservent un feuilletage de codimension un non-trivial.

Théorème (Casale-Freitag-Nagloo)

Pour des choix corrects de fractions rationnelles $R(y) \in \mathbb{C}(y)$, l'équation différentielle d'ordre 3

$$S(y) + (y')^2 R(y) = 0 \text{ où } S(y) = (y''/y')' - 1/2(y''/y')^2.$$

est minimale: les solutions de (E) sont dans $\mathcal{C}_3 \setminus \mathcal{C}_2$.

On peut présenter la même équation différentielle comme un ouvert $U \subset \mathbb{C}^3_{x,y,z}$ munie d'un champ de vecteurs

$$v(x,y,z) = y\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} + (-R(x)y^3 + \frac{3}{2}\frac{z^2}{y})\frac{\partial}{\partial z}$$

En utilisant que le champ de vecteurs $v(x,y,z)$ engendre avec les champs de vecteurs

$$g(x,y,z) = y\frac{\partial}{\partial y} + 2z\frac{\partial}{\partial z} \text{ et } h^-(x,y,z) = 2y\frac{\partial}{\partial z}$$

une algèbre de Lie à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, on voit que:

L'équation différentielle ci dessus laisse toujours invariant un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension un.

Équations géodésiques d'une variété compacte à courbure négative

Théorème (J.)

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ une surface algébrique réelle compacte et lisse. On suppose que:

la restriction à Σ de la métrique euclidienne à courbure strictement négative (mais possiblement variable) en tout point.

Alors l'équation différentielle algébrique $G(\Sigma)$ d'ordre 3 des géodésiques unitaires sur Σ vérifie:

(A) *$G(\Sigma)$ est minimale : les coordonnées des solutions génériques de $G(\Sigma)$ sont des fonctions méromorphes vivant dans $\mathcal{C}_3 \setminus \mathcal{C}_2$.*

(B) *L'équation différentielle $G(\Sigma)$ est désintégrée.*

Ce théorème est obtenu en combinant la stratégie précédente avec des arguments de dynamique topologique et différentielle réelle:

- On utilise la propriété de mélange faible du flot analytique réel pour établir la propriété d'orthogonalité aux constantes.
- On utilise la décomposition d'Anosov de l'espace tangent de $N = S^1(\Sigma)$

$$TN = W^{ss} \oplus E \oplus W^{su}$$

pour établir l'absence de feuilletages et de tissus invariants alg. intégrables.

Merci pour votre attention!