Sur les relations algébriques entre les solutions des équations de Poizat

Rémi Jaoui

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Séminaire de combinatoire et de théorie des nombres (Lyon)

Introduction

Deux objectifs de mon exposé : présenter des techniques à l'intersection entre la théorie des modèles et l'algèbre différentielle qui permettent d'étudier :

(a) les propriétés d'intégrabilité des solutions d'équations différentielles algébriques non-linéaires et particulièrement la notion de nouvelles transcendante au sens de Painlevé (1895).

(b) les relations algébriques entre solutions d'équations différentielles algébriques (non linéaires).

Les Mathématiques constituent un continent solidement agencé, dont tous les pays sont bien reliés les uns aux autres ; l'œuvre de Paul Painlevé est une île originale et splendide dans l'océan voisin.
(Poincaré)

Un premier exemple : les équations de Painlevé

Considérons la première equation de Painlevé

$$(P_I) : y'' = 6y^2 + t.$$

Théorème (Painlevé (1895), Nishioka (1988), Nagloo-Pillay (2011))

(a) *L'équation (P_I) est strictement minimale : les solutions de (P_I) sont de nouvelles transcendantes au sens de Painlevé.*

(b) *Si $y_1(t), \ldots, y_r(t)$ de (P_I) sont r solutions distinctes de (P_I) alors elles sont algébriquement indépendantes avec leurs dérivées premières :*

$$trdeg(y_1, y_1', \ldots, y_r, y_r' / \mathbb{C}(t)) = 2r.$$

La propriété (a) signifie que les solutions de (P_I) ne peuvent être exprimées en composant des "fonctions méromorphes classiques" telles que $exp(t)$, $ln(t)$, $\wp(t)$ avec

- des fonctions rationnelles
- des solutions d'équations différentielles $G(y', y, t) = 0$ d'ordre un.

Plus généralement, Nagloo et Pillay étudient les relations algébriques entre différentes équations de Painlevé plus générales.

Un second exemple : les équations différentielles Schwarziennes

Considérons l'équation différentielle d'ordre trois vérifiée par l'invariant modulaire j :

$$(J) : (y''/y')' - \frac{1}{2}(y''/y')^2 + \frac{y^2 - 1668y + 2654206}{2y^2(y-1728)^2}(y')^2 = 0.$$

Théorème (Freitag-Scanlon(2014), Casale-Freitag-Nagloo(2018))

(a) *L'équation (J) est strictement minimale : les solutions analytiques de (J) sont de nouvelles transcendantes au sens de Painlevé.*

(b) *Il existe une collection dénombrable $(G_k(X_1, X_2) \in \mathbb{C}[X_1, X_2], k \in N)$ de relations algébriques "binaires" spéciales telle que : si $j_1(t), \ldots, j_r(t)$ sont des solutions de (J) alors sont algébriquement indépendantes avec leurs dérivées premières et secondes :*

$$trdeg(j_1, j_1', j_1'' \ldots, j_r, j_r', j_r''/\mathbb{C}(t)) = 3r \textbf{ sauf si}$$

il existe $i_1 \neq i_2$ tel que $G_k(j_{i_1}, j_{i_2}) = 0$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

Les équations de Poizat

Considérons la famille d'équations différentielles de la forme

$$E(f) : (y''/y') = f(y) \text{ où } f(y) \in \mathbb{C}(y).$$

Théorème (Freitag-J.-Marker-Nagloo, 2022+)

(a) *L'équation $E(f)$ est strictement minimale si et seulement si*

$(*)$ *: la fonction rationnelle $f(y)$ admet un résidu complexe non nul.*

Si on écrit la décomposition en éléments simples de $f(y)$ comme :

$$f(y) = Q(y) + \underbrace{\sum \frac{\alpha_i}{y - a_i}}_{FO} + \sum_{n_{i,j} \geq 1} \frac{\beta_{i,j}}{(y - a_i)^{n_{i,j}}}$$

(a') $E(f)$ est strictement minimale si et seulement si FO est non triviale.

Les équations de Poizat

Considérons la famille d'équations différentielles de la forme

$$E(f) : (y''/y') = f(y) \text{ où } f(y) \in \mathbb{C}(y).$$

Théorème (Freitag-J.-Marker-Nagloo, 2022+)

(a) *L'équation $E(f)$ est strictement minimale si et seulement si*

$$(*) : \textit{la fonction rationnelle } f(y) \textit{ admet un résidu complexe non nul.}$$

(b) *Considérons $f_1(y), \ldots, f_r(y) \in \mathbb{C}(y)$ vérifiant $(*)$. Si $y_1(t), \ldots, y_r(t)$ sont des solutions de $E(f_1), \ldots, E(f_r)$ alors elles sont algébriquement indépendentes avec leurs dérivées premières*

$$trdeg(y_1, y_1' \ldots, y_r, y_r'/\mathbb{C}) = 2r \ \textbf{\textit{sauf si}}$$

il existe $i \neq j$ et $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tels que $y_i = ay_j + b$. Dans ce cas, $f_j(y) = f_i(ay + b)$.

Si on écrit la décomposition en éléments simples de $f(y)$ comme :

$$f(y) = Q(y) + \underbrace{\sum \frac{\alpha_i}{y - a_i}}_{FO} + \sum_{n_{i,j} \geq 1} \frac{\beta_{i,j}}{(y - a_i)^{n_{i,j}}}$$

(a') $E(f)$ est strictement minimale si et seulement si FO est non triviale.

Quelques calculs explicites

Considérons $P, Q \in \mathbb{C}[y]$ des polynômes quelconques et

$$f_{\gamma,c}(y) = \frac{\gamma}{y-c} \text{ et } g_{\alpha,a,\beta,b}(y) = \frac{\alpha}{y-a} + \frac{\beta}{y-b} \text{ avec } \alpha, \beta, \gamma \neq 0 \text{ et } a \neq b$$

(b_1) Toute solution de $E(P + f_{\gamma,c})$ est algébriquement indépendante de toute solution de $E(Q + g_{\alpha,a,\beta,b})$ (avec leurs dérivées).

Quelques calculs explicites

Considérons $P, Q \in \mathbb{C}[y]$ des polynômes quelconques et

$$f_{\gamma,c}(y) = \frac{\gamma}{y-c} \text{ et } g_{\alpha,a,\beta,b}(y) = \frac{\alpha}{y-a} + \frac{\beta}{y-b} \text{ avec } \alpha, \beta, \gamma \neq 0 \text{ et } a \neq b$$

(b_1) Toute solution de $E(P + f_{\gamma,c})$ est algébriquement indépendante de toute solution de $E(Q + g_{\alpha,a,\beta,b})$ (avec leurs dérivées).

(b_2) Si $y_1, \ldots, y_n$ sont des solutions distinctes de $E(P + f_{\gamma,c})$ alors elles sont algébriquement indépendantes (avec leurs dérivées).

Quelques calculs explicites

Considérons $P, Q \in \mathbb{C}[y]$ des polynômes quelconques et

$$f_{\gamma,c}(y) = \frac{\gamma}{y-c} \text{ et } g_{\alpha,a,\beta,b}(y) = \frac{\alpha}{y-a} + \frac{\beta}{y-b} \text{ avec } \alpha, \beta, \gamma \neq 0 \text{ et } a \neq b$$

(b_1) Toute solution de $E(P + f_{\gamma,c})$ est algébriquement indépendente de toute solution de $E(Q + g_{\alpha,a,\beta,b})$ (avec leurs dérivées).

(b_2) Si $y_1, \ldots, y_n$ sont des solutions distinctes de $E(P + f_{\gamma,c})$ alors elles sont algébriquement indépendentes (avec leurs dérivées).

(b_3) Supposons que $\alpha \neq -\beta$. Si $y_1, \ldots, y_n$ sont des solutions distinctes de $E(Q + g_{\alpha,a,\beta,b})$ alors elles sont algébriquement indépendantes (avec leurs dérivées).

(b_4) Supposons que $\alpha = -\beta$. Si $y_1, \ldots, y_n$ sont des solutions de $E(g_{\alpha,a,\beta,b})$ alors elles sont algébriquement indépendantes (avec leurs dérivées) si et seulement si pour tout $i \neq j$,

$$y_i(t) \neq y_j(t) \text{ et } y_i(t) \neq y_j(a+b-t)$$

Plan :

(1) La hierarchie de Painlevé et les nouvelles transcendantes

(2) Comment montrer (a) en pratique ?

(3) Comment utiliser (a) pour montrer (b) ?

La hiérarchie de Painlevé

491

Sur une classification des transcendantes engendrées par les équations différentielles.

Regardons comme connues les seules fonctions algébriques (1) de x, et envisageons l'ensemble des transcendantes (τ) définies par une équation différentielle quelconque:

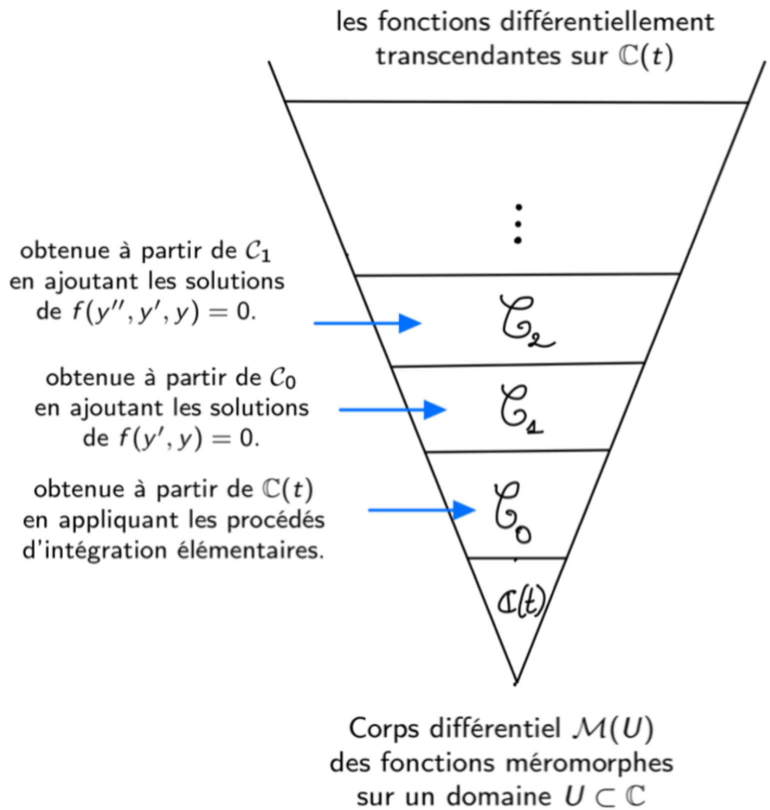
$$(1) \qquad F(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}) = 0$$

algébrique en x, y, y', ... $y^{(n)}$.

Une transcendante quelconque $y(x)$ n'appartient pas en général à l'ensemble (τ): c'est ainsi que la fonction $\Gamma(x)$, que la transcendante de M. Fredholm ne vérifient aucune équation (1) d'ordre si élevé qu'elle soit. Mais quand une fonction $y(x)$ appartient à l'ensemble (τ) il en est de même évidemment de ses dérivées successives: si $y_1(x)$, sont n fonctions τ, il en est de même de $y = R(x, y_1, \ldots y_n)$ où R est algébrique en $x, y_1 \ldots y_n$ et de $y_2[y_1(x)]$, etc. Si l'équation (1), algébrique en $y, y' \ldots y^{(n)}$, a ses coëfficients transcendants en x mais de l'espèce (τ), son intégrale générale est encore de l'espèce (τ).

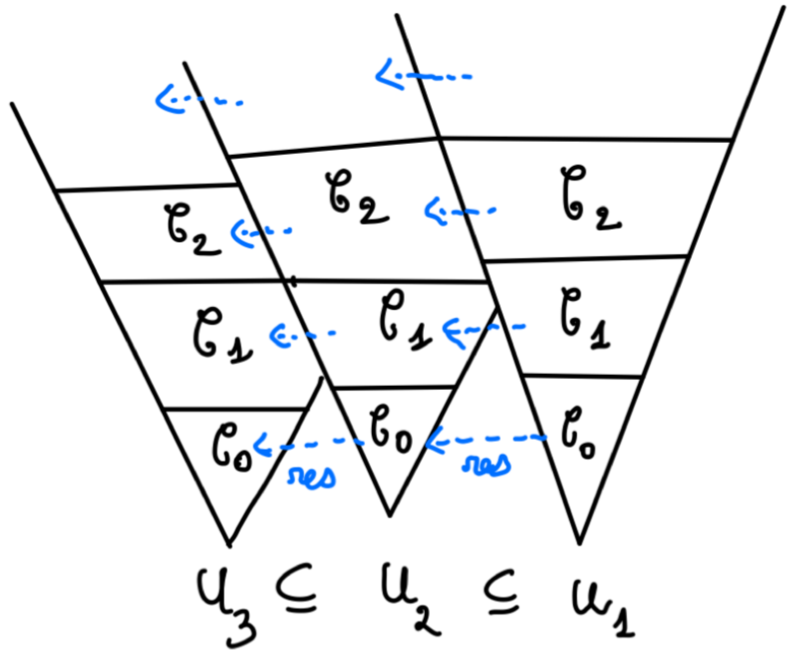
La hiérarchie de Painlevé

But : Décomposer les solutions d'équations différentielles algébriques à partir d'un certain nombre de procédés d'intégration élémentaires identifiés par Painlevé, Nishioka et Umemura. Les équations différentielles dont les solutions sont de nouvelles transcendantes sont celles qui sont indécomposables par ces procédés.



La hiérarchie de Painlevé

But : Décomposer les solutions d'équations différentielles algébriques à partir d'un certain nombre de procédés d'intégration élémentaires identifiés par Painlevé, Nishioka et Umemura. Les équations différentielles dont les solutions sont de nouvelles transcendantes sont celles qui sont indécomposables par ces procédés.



⚠ : on fait ici de l'algèbre différentielle et on autorise toujours à remplacer l'ouvert U par un domaine complexe $V \subset U$ plus petit.

Fonctions méromorphes classiques

Definition (Umemura)

La classe $\mathcal{C}_0$ des fonctions méromorphes classiques est la plus petite classe de fonctions méromorphes contenant $\mathbb{C}(t)$ et stable par les opérations suivantes :

(A) Résoudre une *équation algébrique* : si $\xi \in \mathcal{M}(U)$ est solution d'une équation algébrique :

$$\xi^r + b_{r-1}\xi^{r-1} + \ldots b_1\xi + b_0 = 0 \text{ où } b_0, \ldots, b_{r-1} \in \mathcal{M}(U)$$

alors $b_0, \ldots, b_{r-1} \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow \xi \in \mathcal{C}_0$.

Fonctions méromorphes classiques

Definition (Umemura)

La classe $\mathcal{C}_0$ des fonctions méromorphes classiques est la plus petite classe de fonctions méromorphes contenant $\mathbb{C}(t)$ et stable par les opérations suivantes :

(A) Résoudre une *équation algébrique* : si $\xi \in \mathcal{M}(U)$ est solution d'une équation algébrique :

$$\xi^r + b_{r-1}\xi^{r-1} + \dots b_1\xi + b_0 = 0 \text{ où } b_0, \dots, b_{r-1} \in \mathcal{M}(U)$$

alors $b_0, \dots, b_{r-1} \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow \xi \in \mathcal{C}_0$.

(C1) Résoudre une *équation différentielle linéaire* (d'ordre arbitraire) : si $\xi \in \mathcal{M}(U)$ est solution d'une équation différentielle linéaire :

$$\xi^{(r)} + b_{r-1}\xi^{(r-1)} + \dots + b_1\xi = 0$$

alors $b_1, \dots, b_{r-1} \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow \xi \in \mathcal{C}_0$.

Fonctions méromorphes classiques

Definition (Umemura)

La classe $\mathcal{C}_0$ des fonctions méromorphes classiques est la plus petite classe de fonctions méromorphes contenant $\mathbb{C}(t)$ et stable par les opérations suivantes :

(A) Résoudre une *équation algébrique* : si $\xi \in \mathcal{M}(U)$ est solution d'une équation algébrique :

$$\xi^r + b_{r-1}\xi^{r-1} + \dots b_1\xi + b_0 = 0 \text{ où } b_0, \dots, b_{r-1} \in \mathcal{M}(U)$$

alors $b_0, \dots, b_{r-1} \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow \xi \in \mathcal{C}_0$.

(C1) Résoudre une *équation différentielle linéaire* (d'ordre arbitraire) : si $\xi \in \mathcal{M}(U)$ est solution d'une équation différentielle linéaire :

$$\xi^{(r)} + b_{r-1}\xi^{(r-1)} + \dots + b_1\xi = 0$$

alors $b_1, \dots, b_{r-1} \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow \xi \in \mathcal{C}_0$.

(C2) *Précomposer* des fonctions méromorphes de la classe $\mathcal{C}_0$ *avec une fonction abélienne* : si $\xi \in \mathcal{M}(U)$ est de la forme :

$$\xi = \theta \circ \pi \circ (b_1, \dots, b_r) : U \to \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^r/\Lambda \to \mathbb{C}$$

où θ est une fonction mér. sur $\mathbb{C}^r/\Lambda$, $\pi : \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^r/\Lambda$ la projection canonique alors $b_1, \dots, b_r \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow \xi \in \mathcal{C}_0$.

Quelques exemples

Exemples :

- les exponentielles et les logarithmes de fonctions algébriques : par exemple

$$exp(\frac{t^2}{t+1}), ln(\sqrt{t} + \frac{1}{t})$$

  restreinte à un ouvert convenable

- toute fonction que l'on peut atteindre en itérant les procédés précédents : par exemple

$$\sqrt{\wp_{\Lambda_1}(\sqrt{t} + e^t) + \wp_{\Lambda_2}(ln(t))}$$

- les fonctions de Bessel $J_\alpha(t)$ solutions de

$$t^2 y'' + ty' + (t^2 - \alpha^2)y = 0 \text{ où } \alpha \in \mathbb{C}.$$

Deux résultats structurels (Umemura) :

- la classe $\mathcal{C}_0$ est stable par composition (sur des ouverts convenables où cela fait sens),
- les solutions de toute équation différentielle à paramètres dans $\mathbb{C}(t)$ qui admet une théorie de Galois au sens de Kolchin vivent dans la classe $\mathcal{C}_0$. Cette propriété caractérise la classe $\mathcal{C}_0$.

Les classes $\mathcal{C}_k$ avec $k \geq 1$

Definition (Umemura)

Pour $k \geq 1$, la classe $\mathcal{C}_k$ des fonctions méromorphes classiques est la plus petite classe de fonctions méromorphes contenant $\mathbb{C}(t)$ et stable par les opérations :

$$(A),(C_1),(C_2) \text{ et } (P_k) \text{ où l'opération } (P_k) \text{ est décrite par}$$

(P_k) Résoudre *une équation différentielle algébrique non linéaire d'ordre* $\leq k$: Si $\xi \in \mathcal{M}(U)$ est solution d'une équation différnetielle algébrique

$$G(y, y', \ldots, y^{(r)}) = 0 \text{ avec } r \leq k \text{ et } G \in \mathcal{M}(U)[X_0, \ldots, X_r]$$

alors

$$\text{les coefficients de G } \in \mathcal{C}_k \Rightarrow \xi \in \mathcal{C}_k$$

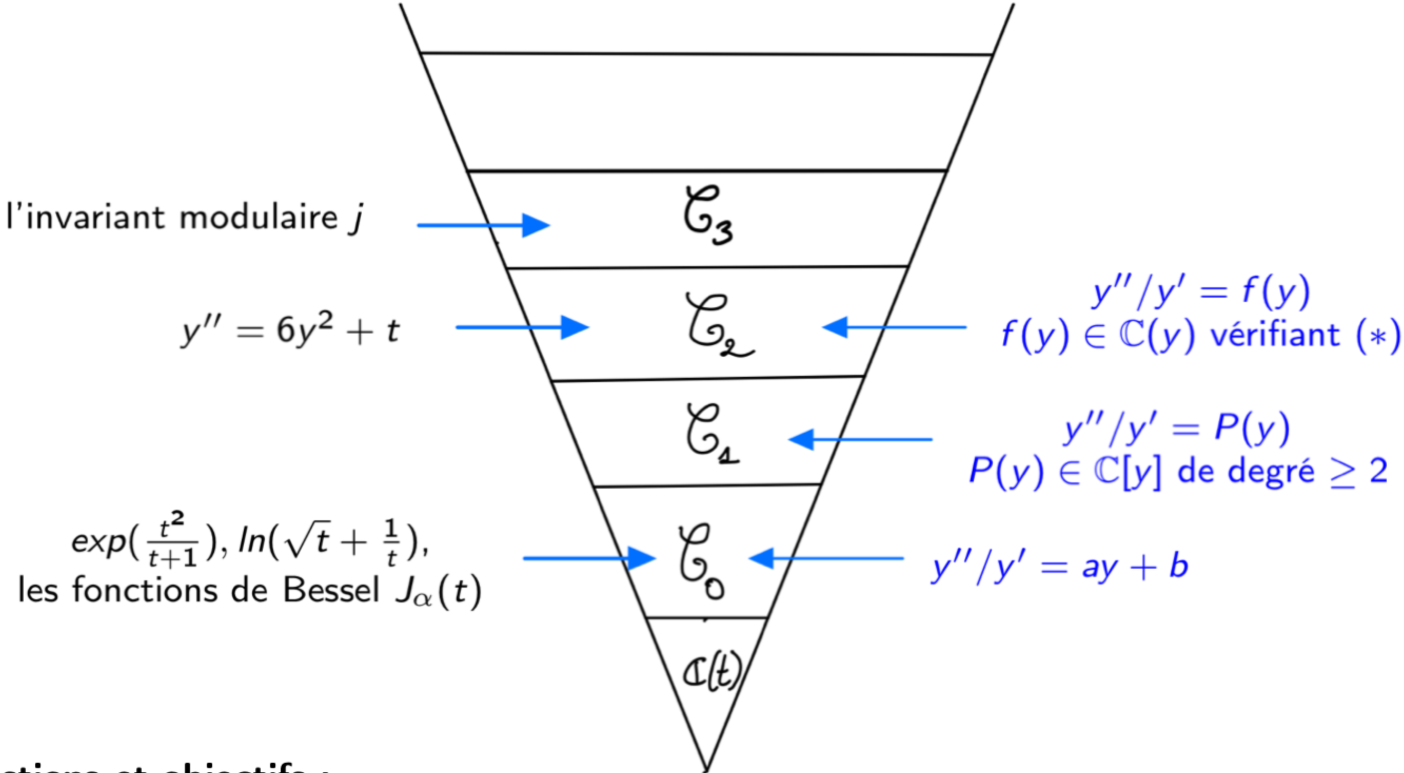
Definition :On dit que l'équation différentielle

$$(E) : F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \text{ définie sur } \mathbb{C}(t)[X_0, \ldots, X_n]$$

est strictement minimale au sens de Shelah ou que ses solutions sont de nouvelles transcendentes au sens de Painlevé si

$$\text{la classe } \mathcal{C}_{n-1} \text{ ne contient aucune solution de } (E) \text{ .}$$

Exemples de nouvelles transcendantes



Questions et objectifs :

- Décrire les techniques de théorie des modèles permettant d'établir que les solutions de certaines équations différentielles sont de nouvelles transcendantes.
- Comparer la "taille" des classes $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$
- Cas des équations de Poizat.

Modèles géométriques pour les équations différentielles autonomes

Pour le reste de mon exposé, je me restreins au cas des équations différentielles autonomes :

$$(E) : P(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \text{ où } P \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n] \text{ vérifie } \frac{\partial P}{\partial X_n} \not\equiv 0.$$

Modèles géométriques pour les équations différentielles autonomes

Pour le reste de mon exposé, je me restreins au cas des équations différentielles autonomes :

$$(E) : P(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \text{ où } P \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n] \text{ vérifie } \frac{\partial P}{\partial X_n} \not\equiv 0.$$

On peut associer à tout équation différentielle algébrique de cette forme, un modèle géométrique (X, v) où X est une variété algébrique complexe et v un champ de vecteurs sur X, bien défini à une transformation birationnelle près.

Exemple : $E(f) : y''/y' = f(y)$ et S l'ensemble des singularités de $f(y) \in \mathbb{C}(y)$.

$$\begin{tikzcd}
X_f := (y'' = y'f(y)) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\cong"'] & \mathbb{A}^3_{(y,y',y'')} \setminus S \times \mathbb{A}^2 \arrow[d] \\
 & U = \mathbb{A}^2_{y,y'} \setminus S \times \mathbb{A}^1
\end{tikzcd}$$

Considérons le champ de vecteurs sur $X_f \simeq U_f$ donné par

$$v_f = y'\frac{\partial}{\partial y} + y'f(y)\frac{\partial}{\partial y'}$$

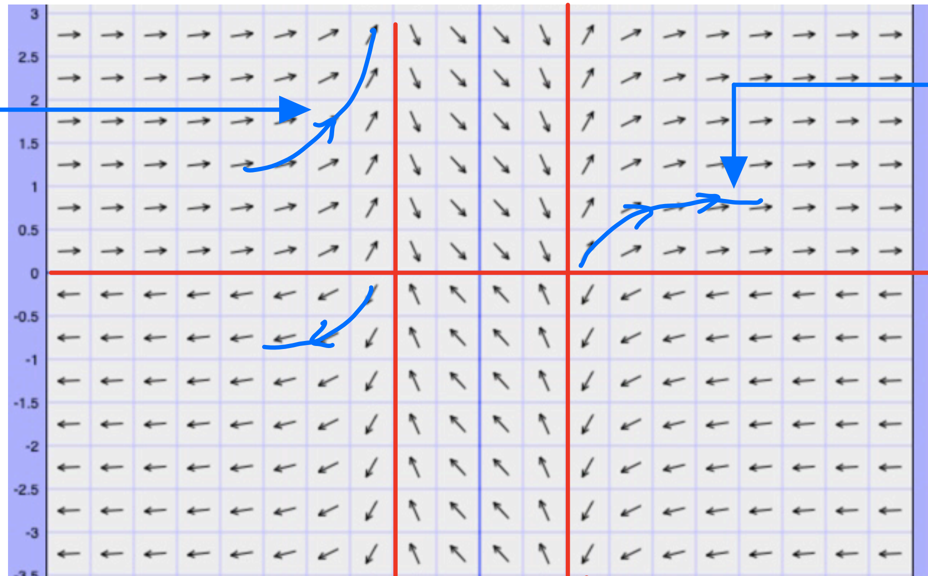
Un modèle géométrique de (E_f) est la paire (X_f, v_f).

La catégorie des champs de vecteurs algébriques

$t \mapsto (y(t), y'(t))$

où

$y(t)$ solution de $E(f)$



Zariski dense.

$y' = 0$

pôle pôle

Pour décrire les équations différentielles autonomes, on travaille dans la catégorie $\mathcal{C}$ des champs de vecteurs algébriques complexes dont :

- les objets sont des paires (X, v) où X est une variété algébrique complexe et v et un champ de vecteurs sur X,
- les morphismes $\phi : (X, v) \to (Y, w)$ sont les morphismes $\phi : X \to Y$ de variétés algébriques tels que :

$$d\phi(v) = w.$$

Un théorème de structure

Soit (X, v) un champ de vecteur algébrique de dimension $n \geq 2$.

Théorème (Pillay 90 – Pillay-Moosa 04)

Une des trois possibilités suivantes est réalisée :

De plus, les propriétés (1) et (3), (2) et (3) sont mututellement exclusives.

Un théorème de structure

Soit (X, v) un champ de vecteur algébrique de dimension $n \geq 2$.

Théorème (Pillay 90 – Pillay-Moosa 04)

Une des trois possibilités suivantes est réalisée :

(1) (X, v) *est un presque espace homogène : il existe*

- *un objet en groupe* (G, v_G) *dans la catégorie* $\mathcal{C}$
- *un morphisme rationnel dominant génériquement fini* $\phi : (X, v) \dashrightarrow (X', v')$

et une action transitive $(G, v_G)x(X', v') \to (X', v')$ *dans la catégorie* $\mathcal{C}$.

De plus, les propriétés (1) et (3), (2) et (3) sont mututellement exclusives.

Un théorème de structure

Soit (X, v) un champ de vecteur algébrique de dimension $n \geq 2$.

Théorème (Pillay 90 – Pillay-Moosa 04)

Une des trois possibilités suivantes est réalisée :

(1) (X, v) *est un presque espace homogène : il existe*

- *un objet en groupe* (G, v_G) *dans la catégorie* $\mathcal{C}$
- *un morphisme rationnel dominant génériquement fini* $\phi : (X, v) \dashrightarrow (X', v')$

et une action transitive $(G, v_G)x(X', v') \to (X', v')$ *dans la catégorie* $\mathcal{C}$.

(2) (X, v) *admet une presque fibration : il existe*

- *un recouvrement génériquement fini* $\phi : (X', v') \dashrightarrow (X, v)$,
- *un objet* (Y, w) *de la catégorie* $\mathcal{C}$ *vérifiant* $0 < dim(Y) < dim(X)$

et une fibration $\phi : (X', v') \to (Y, w)$ *dans la catégorie* $\mathcal{C}$ *(morphisme surjective dont les fibres sont irréductibles).*

De plus, les propriétés (1) et (3), (2) et (3) sont mututellement exclusives.

Un théorème de structure

Soit (X, v) un champ de vecteur algébrique de dimension $n \geq 2$.

Théorème (Pillay 90 – Pillay-Moosa 04)

Une des trois possibilités suivantes est réalisée :

(1) *(X, v) est un presque espace homogène : il existe*

- *un objet en groupe (G, v_G) dans la catégorie $\mathcal{C}$*
- *un morphisme rationnel dominant génériquement fini $\phi : (X, v) \dashrightarrow (X', v')$*

et une action transitive $(G, v_G)x(X', v') \to (X', v')$ dans la catégorie $\mathcal{C}$.

(2) *(X, v) admet une presque fibration : il existe*

- *un recouvrement génériquement fini $\phi : (X', v') \dashrightarrow (X, v)$,*
- *un objet (Y, w) de la catégorie $\mathcal{C}$ vérifiant $0 < dim(Y) < dim(X)$*

et une fibration $\phi : (X', v') \to (Y, w)$ dans la catégorie $\mathcal{C}$ (morphisme surjective dont les fibres sont irréductibles).

(3) *Les solution génériques de (X, v) sont de nouvelles transcendantes :*

- *pour toute courbe intégrale $\gamma : D \subset \mathbb{C} \to X^{an}$ Zariski-dense dans X,*
- *pour toute fonction rationnelle $f \in \mathbb{C}(X) \setminus \mathbb{C}$*

la fonction méromorphe

$$g = f \circ \gamma : D \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\gamma} X^{an} \overset{f}{\dashrightarrow} \mathbb{C} \text{ est dans } \mathcal{C}_n \setminus \mathcal{C}_{n-1}.$$

De plus, les propriétés (1) et (3), (2) et (3) sont mututellement exclusives.

Commentaires

(1) Pour les équations de Poizat, (1) est réalisé pour

$$x''/x' = ax + b.$$

Dans ce cas, les solutions de l'équation différentielle (X, v) sont dans la classe $\mathcal{C}_0$: si $\gamma : D \to X^{an}$ est une courbe intégrale du champ de vecteurs v et $f \in \mathbb{C}(X)$

$$g = f \circ \gamma : D \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\gamma} X^{an} \overset{f}{\dashrightarrow} \mathbb{C} \text{ est dans } \mathcal{C}_0.$$

(2) Pour les équations de Poizat, (2) est réalisé lorsque

$$x''/x' = g(x) \text{ avec } g(x) \in \mathbb{C}[x] \text{ de degré} \geq 2.$$

Si (X, v) admet une fibration $\phi : (X, v) \to (Y, w)$ avec $dim(Y) = m < dim(X) = n$ alors les solutions de (X, v) sont toutes dans la classe $\mathcal{C}_{max(m,n-m)}$.

(3) Pour les équations de Poizat, c'est le cas lorsque :

$$x''/x' = g(x) \text{ avec } g(x) \in \mathbb{C}(x) \text{ admet un résidu complexe non nul.}$$

Pour démontrer que toutes les solutions d'une équation différentielle sont de nouvelles transcendantes, on procède par élimination des cas (1) et (2).

Deux autres applications du théorème de structure

Théorème (Freitag-J.-Moosa, 2021+)

Soit $(E) : P(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ une équation différentielle autonome. Supposons que :

(C_2) : toute paire de solutions (y_1, y_2) distinctes non constantes (E) forme avec leurs dérivées un ensemble $\mathbb{C}$-algébriquement indépendant :

$$trdeg(y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n-1)}/\mathbb{C}) = 2n.$$

Alors toutes les solutions non constantes de (E) sont de nouvelles transcendantes.

solutions non-constantes $\Leftrightarrow$ solutions vérifiant $y' \neq 0$ $\Leftrightarrow$ solutions qui ne sont pas des points d'équilibre du système.

Deux autres applications du théorème de structure

Théorème (Freitag-J.-Moosa, 2021+)

Soit $(E) : P(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ *une équation différentielle autonome. Supposons que :*

(C_2) *: toute paire de solutions* (y_1, y_2) *distinctes non constantes* (E) *forme avec leurs dérivées un ensemble* $\mathbb{C}$*-algébriquement indépendant :*

$$trdeg(y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n-1)}/\mathbb{C}) = 2n.$$

Alors toutes les solutions non constantes de (E) *sont de nouvelles transcendantes.*

solutions non-constantes $\Leftrightarrow$ solutions vérifiant $y' \neq 0$ $\Leftrightarrow$ solutions qui ne sont pas des points d'équilibre du système.

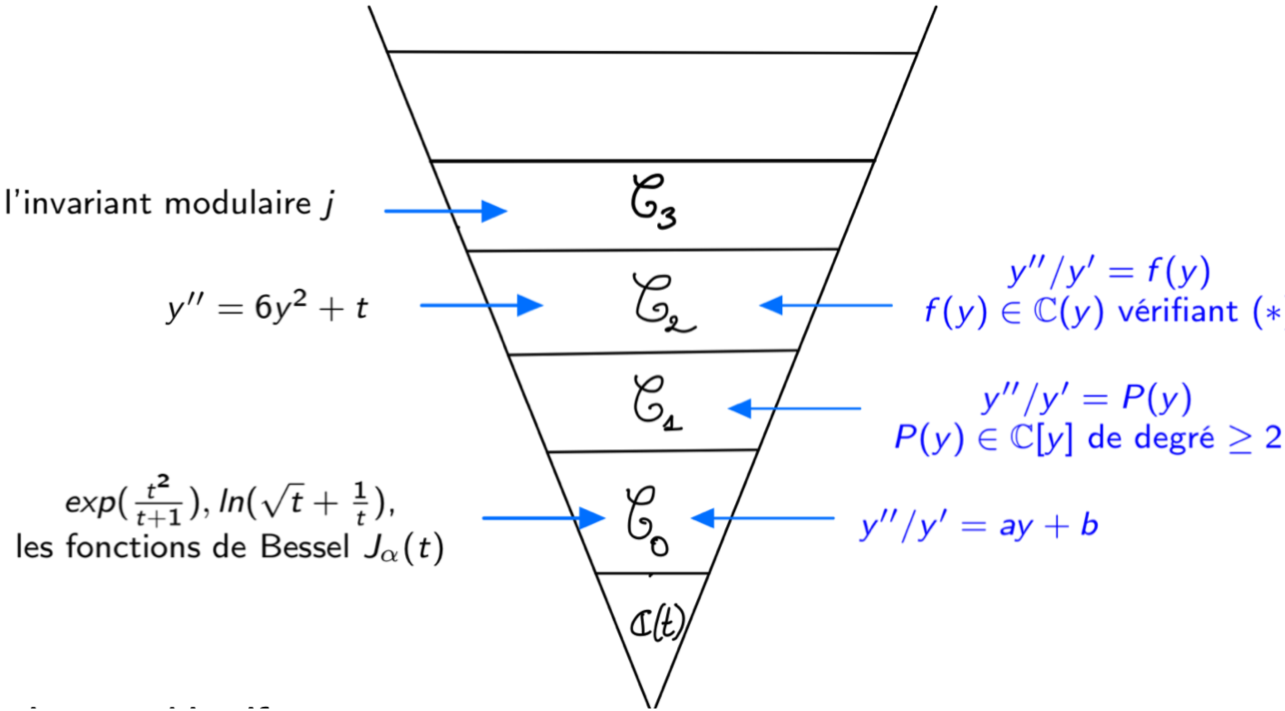
Théorème (J., 2019)

Considérons un système d'équations différentielles de la forme

$$(S) : \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad \text{où } f, g \in \mathbb{C}[x, y] \text{ de degré } \geq 3$$

dont les coefficients sont des nombres complexes aléatoires. Alors presque surement, toutes les solutions non constantes de (E) *sont de nouvelles transcendantes.*

Relations algébriques entre nouvelles transcendantes



Questions et objectifs :

- Quels sont les énoncés de transcendance que l'on peut déduire 'gratuitement'' de la représentation précédente ?
- Comment étudier les relations algébriques entre fonctions méromorphes des classes $\mathcal{C}_k$ pour $k \geq 1$?
- Cas des équations de Poizat.

La trichotomie de Zilber pour les équations différentielles autonomes

Considérons pour $i = 1, \ldots, r$, des équations différentielles autonomes :

$$(E_i) : F_i(y, y', \ldots, y^{(n_i)}) = 0 \text{ où } F_i \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_{n_i}]$$

et supposons que les solutions de (E_i) sont des nouvelles transcendantes ($\in \mathcal{C}_{n_i} \setminus \mathcal{C}_{n_i - 1}$).

Théorème (Hrushovski-Sokolovic, 96)

(a) *Les solutions de (E_i) sont algébriquement indépendantes de toutes les fonctions méromorphes classiques de la classe $\mathcal{C}_0$.*

La trichotomie de Zilber pour les équations différentielles autonomes

Considérons pour $i = 1, \ldots, r$, des équations différentielles autonomes :

$$(E_i) : F_i(y, y', \ldots, y^{(n_i)}) = 0 \text{ où } F_i \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_{n_i}]$$

et supposons que les solutions de (E_i) sont des nouvelles transcendantes ($\in \mathcal{C}_{n_i} \setminus \mathcal{C}_{n_i - 1}$).

Théorème (Hrushovski-Sokolovic, 96)

(a) *Les solutions de (E_i) sont algébriquement indépendentes de toutes les fonctions méromorphes classiques de la classe $\mathcal{C}_0$.*

(b) *Supposons $n_1 \neq n_2 \neq \ldots \neq n_r$. Si $y_1, \ldots, y_r$ sont des solutions de $(E_1), \ldots, (E_r)$ respectivement, elles sont algébriquement indépendantes (avec leur dérivées) :*

$$trdeg(y_1, \ldots, y_1^{(n_1 - 1)}, y_2, \ldots, y_2^{(n_2 - 1)}, \ldots, y_r, \ldots, y_r^{n_r - 1}/\mathbb{C}) = n_1 + \ldots + n_r.$$

La trichotomie de Zilber pour les équations différentielles autonomes

Considérons pour $i = 1, \ldots, r$, des équations différentielles autonomes :

$$(E_i) : F_i(y, y', \ldots, y^{(n_i)}) = 0 \text{ où } F_i \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_{n_i}]$$

et supposons que les solutions de (E_i) sont des nouvelles transcendantes ($\in \mathcal{C}_{n_i} \setminus \mathcal{C}_{n_i-1}$).

Théorème (Hrushovski-Sokolovic, 96)

(a) *Les solutions de (E_i) sont algébriquement indépendentes de toutes les fonctions méromorphes classiques de la classe $\mathcal{C}_0$.*

(b) *Supposons $n_1 \neq n_2 \neq \ldots \neq n_r$. Si $y_1, \ldots, y_r$ sont des solutions de $(E_1), \ldots, (E_r)$ respectivement, elles sont algébriquement indépendantes (avec leur dérivées) :*

$$trdeg(y_1, \ldots, y_1^{(n_1-1)}, y_2, \ldots, y_2^{(n_2-1)}, \ldots, y_r, \ldots, y_r^{n_r-1}/\mathbb{C}) = n_1 + \ldots + n_r.$$

(c) *Supposons $n_1 = n_2 = \ldots = n_r = n$ alors si $y_1, \ldots, y_r$ sont des solutions de $(E_1), \ldots, (E_r)$, elles sont algébriquement indépendantes (avec leur dérivées) :*

$$trdeg(y_1, \ldots, y_1^{(n-1)}, y_2, \ldots, y_2^{(n-1)}, \ldots, y_r, \ldots, y_r^{n-1}/\mathbb{C}) = r.n \text{ sauf si}$$

pour une paire $i \neq j \leq r$,

$$trdeg(y_i, \ldots, y_i^{(n-1)}, y_j \ldots, y_j^{(n-1)}/\mathbb{C}) = n.$$

Equations de Poizat : Classification des relations algébriques I

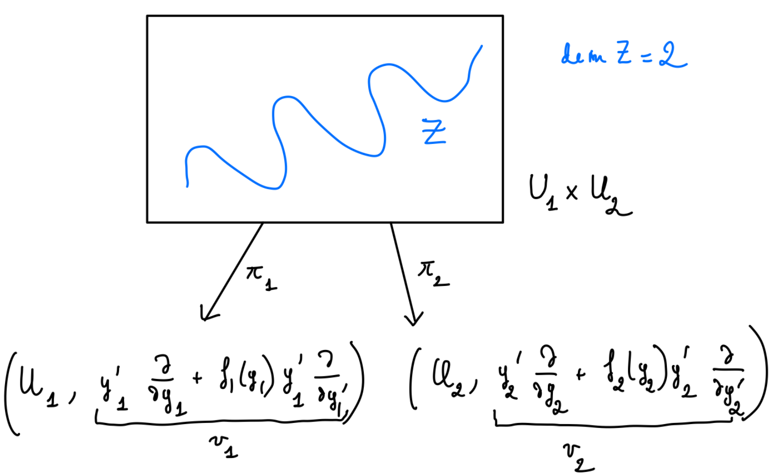
Considérons $f_1(y), \ldots, f_r(y) \in \mathbb{C}(y)$ admettant toutes un résidu complexe non nul et considérons $y_1, \ldots, y_r$ des solutions de

$$(E_i) : y''/y' = f_i(y)$$

- On sait que les y_i sont de nouvelles transcendantes donc par (c) si elles ne sont pas algébriquement indépendantes il existe $i \neq j$ tels que

$$trdeg(y_i, y_i', y_j, y_j'/\mathbb{C}) = 2.$$

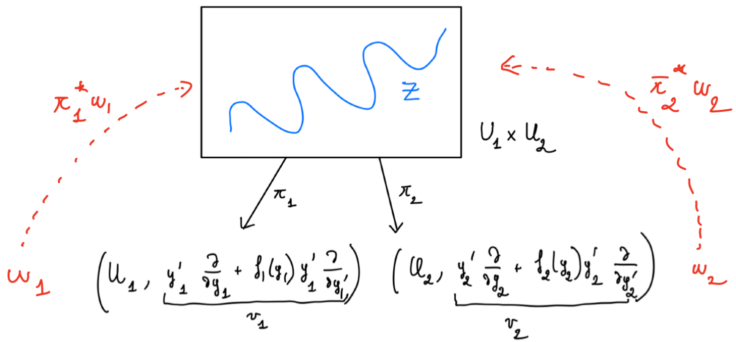
- On suppose $i = 1, j = 2$. Considérons (U_1, v_1) et (U_2, v_2) des modèles géométriques de (E_1) et (E_2) respectivement.



- la clôture de Zariski Z de $t \mapsto (y_1(t), y_2'(t), y_2(t), y_2'(t))$ a dimension deux.
- Z se projette génériquement sur U_1 et U_2 via π_1 et π_2.
- Z est tangente au champ de vecteurs produit $v_1 \times v_2$.

Observation : les courbes intégrales de v_1 et v_2 préservent respectivement les formes volumes :

$$\omega_1 = \frac{dy_1 \wedge dy_1'}{y_1'} \text{ et } \omega_2 = \frac{dy_2 \wedge dy_2'}{y_2'}$$

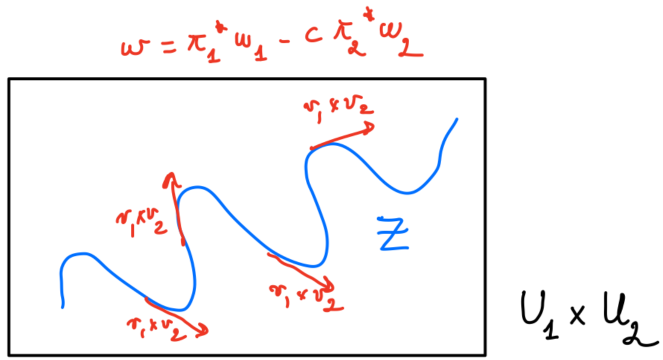


Si une équation différentielle autonome n'admet pas d'intégrale première rationnelle alors l'ensemble des formes volumes invariantes est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension un.

Conclusion : Il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que la 2-forme

$$\omega = \pi_1^* \omega_1 - c \pi_2^* \omega_2$$

s'annule le long de Z.



La contraction de la 2-forme ω par le champ de vecteurs $v_1 \times v_2$ donnée par

$$i_{v_1 \times v_2}(\omega) : v \mapsto \omega(v_1 \times v_2, v)$$

est une 1-forme fermée s'annulant le long de Z.

Conséquence :

$$Z \subset \text{une feuille du feuilletage défini par } \omega = 0$$

Fin de la preuve : en calculant explicitement, ω, $i_{v_1 \times v_2}(\omega)$ et l'indépendence entre les 1-formes exactes et 1-formes logarithmiques (Ax), on montre que la 1-forme

$$dy_1 - c dy_2 \text{ s'annule sur } Z$$

dont les feuilles sont de la forme $y_1 = cy_2 + d$ avec $c, d \in \mathbb{C}$

Merci pour votre attention !

Bibliographie :

- E. Hrushovski : *Geometric model theory*, Documenta Mathematica Extra Volume, ICM 1998.
- A. Pillay : *Algebraic D-groups and differential Galois theory*, Pacific Journal of Mathematics, 2004.

- *Generic planar algebraic vector fields are strongly minimal and disintegrated*, Algebra and Number Theory, 2021.
- (avec J. Freitag et R. Moosa) *When any three solutions are independent*, arXiv, 2021+.
- (avec J. Freitag, D. Marker et J. Nagloo) *On the equations of Poizat and Liénard*, arXiv, 2022+.